2. Demostrando que AB y BC son perpendiculares.

Cosenos directores de AB, $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$. Cosenos directores de BC, $\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{5}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{7}{5\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{5}{5\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{7 - 10 + 3}{5\sqrt{42}} = 0.$$

De otra forma: La suma de los productos de las componentes de las dos rectas es igual a cero. $7(1) + 5(-2) + 1(3) = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representar los puntos (2, 2, 3), (4, —1, 2), (—3, 2, 4), (3, 4, —5), (—4, —3, —2), (0, 4, —4), (4, 0, —2), (0, 0, —3), (—4, 0, —2), (3, 4, 0).

2. Hallar la distancia del origen a los puntos del Problema 1.
Sol. $\sqrt{17}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{29}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 3, $2\sqrt{5}$, 5.

3. Hallar la distancia entre los pares de puntos siguientes:
a) (2, 5, 3) y (—3, 2, 1). *Sol.* $\sqrt{38}$.
b) (0, 3, 0) y (6, 0, 2). *Sol.* 7.
c) (—4, —2, 3) y (3, 3, 5). *Sol.* $\sqrt{78}$.

4. Hallar el perímetro de los triángulos siguientes:
a) (4, 6,1), (6, 4, 0), (—2, 3, 3). *Sol.* $10 + \sqrt{74}$.
b) (—3, 1, —2), (5, 5, —3), (—4, —1, —1). *Sol.* $20 + \sqrt{6}$.
c) (8, 4, 1), (6, 3, 3), (—3, 9, 5). *Sol.* $14 + 9\sqrt{2}$.

5. Representar los puntos siguientes y hallar la distancia de cada uno de ellos al origen así como los cosenos de la dirección que con él definen.
a) (—6, 2, 3). *Sol.* 7, $\cos\alpha = -6/7$, $\cos\beta = 2/7$, $\cos\gamma = 3/7$.
b) (6, —2, 9). *Sol.* 11, $\cos\alpha = 6/11$, $\cos\beta = -2/11$, $\cos\gamma = 9/11$.
c) (—8, 4, 8). *Sol.* 12, $\cos\alpha = -2/3$, $\cos\beta = 1/3$, $\cos\gamma = 2/3$.
d) (3, 4, 0). *Sol.* 5, $\cos\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 4/5$, $\cos\gamma = 0$.
e) (4, 4, 4). *Sol.* $4\sqrt{3}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$, $\cos\gamma = 1/\sqrt{3}$.

6. Hallar los ángulos de dirección de las rectas que unen el origen con los puntos del Problema 5 *a*), *d*) y *e*).
Sol. *a*) $\alpha = 148°59{,}8'$, $\beta = 73°23{,}9'$, $\gamma = 64°37{,}4'$.
d) $\alpha = 53°7{,}8'$, $\beta = 36°52{,}2'$, $\gamma = 90°$.
e) $\alpha = \beta = \gamma = 54°44{,}1'$.

7. Hallar las longitudes de las medianas de los triángulos cuyos vértices son los que se indican. Dar el resultado de las medianas correspondientes a los vértices A, B, C, por este orden.
a) $A(2, -3, 1)$, $B(-6, 5, 3)$, $C(8, 7, -7)$. *Sol.* $\sqrt{91}$, $\sqrt{166}$, $\sqrt{217}$.
b) $A(7, 5, -4)$, $B(3, -9, -2)$, $C(-5, 3, 6)$. *Sol.* $2\sqrt{41}$, $\sqrt{182}$, $\sqrt{206}$.
c) $A(-7, 4, 6)$, $B(3, 6, -2)$, $C(1, -8, 8)$. *Sol.* $\sqrt{115}$, $\sqrt{181}$, $\sqrt{214}$.

8. Hallar los cosenos directores de las rectas que unen el primero con el segundo de los puntos que se indican.
a) (—4, 1, 7), (2, —3, 2). *c*) (—6, 5, —4), (—5, —2, —4). *e*) (3, —5, 4), (—6, 1, 2).
b) (7, 1, —4), (5, —2, —3). *d*) (5, —2, 3), (—2, 3, 7).

Sol. *a*) $\frac{6\sqrt{77}}{77}, -\frac{4\sqrt{77}}{77}, -\frac{5\sqrt{77}}{77}$. *d*) $-\frac{7\sqrt{10}}{30}, \frac{\sqrt{10}}{6}, \frac{2\sqrt{10}}{15}$.

b) $-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}$. *e*) $-\frac{9}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{2}{11}$.

c) $\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10}, 0$.

9. Hallar las componentes de las rectas que pasan por los puntos que se indican.

a) (4, 7, 3), (—5, —2, 6). *Sol.* 3, 3, —1.
b) (—2, 3, —4), (1, 3, 2). *Sol.* —3, 0, —6.
c) (11, 2, —3), (4, —5, 4). *Sol.* 1, 1, —1.

10. Hallar el menor de los ángulos que forman las rectas que pasan por los puntos que se indican.

a) (8, 2, 0), (4, 6, —7); (—3, 1, 2), (—9, —2, 4). *Sol.* 88°10,8′.
b) (4, —2, 3), (6, 1, 7); (4, —2, 3), (5, 4, —2). *Sol.* 90°.
c) De (6, —2, 0) a (5, 4, $2\sqrt{3}$) y de (5, 3, 1) a (7, —1, 5). *Sol.* 73°11,6′.

11. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son (—1, —3, —4), (4, —2, —7) y (2, 3, —8).
Sol. 86°27,7′, 44°25,4′, 49°6,9′.

12. Hallar el área del triángulo del Problema 11. *Sol.* 16, 17 unidades de superficie.

13. Hallar los puntos de intersección de las medianas de los triángulos siguientes:

a) (—1, —3, —4), (4, —2, —7), (2, 3, —8). *Sol.* (5/3, —2/3, —19/3).
b) (2, 1, 4), (3, —1, 2), (5, 0, 6). *Sol.* (10/3, 0, 4).
c) (4, 3, —2), (7, —1, 4), (—2, 1, —4). *Sol.* (3, 1, —2/3).

14. Demostrar que el triángulo de vértices (6, 10, 10), (1, 0, —5), (6, —10, 0) es rectángulo; hallar su área.
Sol. Area $= 25\sqrt{21}$ unidades de superficie.

15. Demostrar que el triángulo de vértices (4, 2, 6), (10, —2, 4), (—2, 0, 2) es isósceles; hallar su área.
Sol. Area $= 6\sqrt{19}$ unidades de superficie.

16. Demostrar, por dos métodos distintos, que los puntos (—11, 8, 4), (—1, —7, —1), (9, —2, 4) son los vértices de un triángulo rectángulo.

17. Demostrar que los puntos (2, —1, 0), (0, —1, —1), (1, 1, —3), (3, 1, —2) son los vértices de un rectángulo.

18. Demostrar que los puntos (4, 2, 4), (10, 2, —2) y (2, 0, —4) son los vértices de un triángulo equilátero.

19. Demostrar, por dos métodos diferentes, que los puntos (1, —1, 3), (2, —4, 5) y (5, —13, 11) son colineales.

20. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidisten de los puntos fijos (1, —2, 3) y (—3, 4, 2). *Sol.* $8x - 12y + 2z + 15 = 0$.

21. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (—2, 3, 4) sea el doble de la correspondiente al (3, —1, —2).
Sol. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 28x + 14y + 24z + 27 = 0$; una esfera.

22. Hallar la ecuación de la esfera de radio 5 y centro (—2, 3, 5).
Sol. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 10z + 13 = 0$.

23. Las componentes de dos rectas son 2, —1, 4 y —3, 2, 2. Demostrar que son perpendiculares.

24. Hallar el valor de k de forma que la recta que une los puntos $P_1(k, 1, -1)$ y $P_2(2k, 0, 2)$ sea perpendicular a la que une P_2 y $P_3(2 + 2k, k, 1)$. *Sol.* $k = 3$.

25. Las componentes de una recta perpendicular a otras dos, de componentes a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2, vienen dadas por los tres determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Hallar las componentes de una recta perpendicular a otras dos de componentes

a) 1, 3, —2 y —2, 2, 4. *Sol.* 16, 0, 8, o bien, 2, 0, 1.
b) —3, 4, 1 y 2, —6, 5. *Sol.* 26, 17, 10.
c) 0, —2, 1 y 4, 0, —3. *Sol.* 3, 2, 4.
d) 5, 3, —3 y —1, 1, —2. *Sol.* —3, 13, 8.

26. Hallar las componentes de una recta perpendicular a las dos rectas determinadas por los pares de puntos de coordenadas (2, 3, —4), (—3, 3, —2) y (—1, 4, 2), (3, 5, 1). *Sol.* —2, 3, —5.

27. Hallar los cosenos directores de una recta perpendicular a otras dos cuyas componentes son 3, 4, 1 y 6, 2, —1. *Sol.* 2/7, —3/7, 6/7.

28. Hallar x sabiendo que el ángulo que forma la recta L_1 —de componentes x, 3, 5— y L_2 —de componentes 2, —1, 2— es 45°. *Sol.* 4, 52.

29. Hallar x para que la recta que pasa por los puntos (4, 1, 2) y (5, x, 0) sea paralela a la que une (2, 1, 1) y (3, 3, —1). *Sol.* $x = 3$.

30. Hallar x para que las rectas del Problema 29 sean perpendiculares. *Sol.* $x = -3/2$.

31. Demostrar que los puntos (3, 3, 3), (1, 2, —1), (4, 1, 1), (6, 2, 5) son los vértices de un paralelogramo.

32. Demostrar que los puntos (4, 2, —6), (5, —3, 1), (12, 4, 5), (11, 9, —2) son los vértices de un rectángulo.

33. Demostrar que la recta que pasa por los puntos (5, 1, —2) y (—4, —5, 13) es la mediatriz del segmento determinado por (—5, 2, 0) y (9, —4, 6).

34. Hallar el ángulo formado por las rectas que pasan por los puntos (3, 1, —2), (4, 0, —4) y (4, —3, 3), (6, —2, 2). *Sol.* $\pi/3$ radianes.

35. Hallar el valor de k para que las rectas de componentes 3, —2, k y —2, k, 4 sean perpendiculares. *Sol.* $k = 3$.

36. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del eje y y del punto (2, 1, —1). *Sol.* $y^2 - 2y - 4x + 2z + 6 = 0$.

37. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano xy y del punto (—1, 2, —3). *Sol.* $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6z + 14 = 0$.

38. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de sus distancias a los ejes x e y sea constante. *Sol.* $y^2 - x^2 = a$.

39. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del eje z y del plano xy. *Sol.* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, un cono.

40. Hallar la ecuación de una esfera de centro el punto (3, —1, 2) y que sea tangente al plano yz. *Sol.* $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$.

41. Hallar la ecuación de una esfera de radio a y que sea tangente a los tres planos coordenados sabiendo que su centro se encuentra en el primer octante. *Sol.* $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2 = 0$.

42. Hallar la ecuación de la esfera de centro (2, —2, 3) y que pase por el punto (7, —3, 5). *Sol.* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 13 = 0$.

43. Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de (—2, 1, —2) y (2, —2, 3). *Sol.* $4x - 3y + 5z - 4 = 0$.

44. Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento determinado por (—2, 3, 2) y (6, 5, —6) en su punto medio. *Sol.* $4x + y - 4z - 20 = 0$.

45. Dados $A(3, 2, 0)$ y $B(2, 1, -5)$, hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ de manera que PA sea perpendicular a PB. *Sol.* $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 3y + 5z + 8 = 0$.

46. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y, z) cuya distancia al punto fijo (2, —1, 3) sea igual a 4. *Sol.* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.